ケイリー・ハミルトンの定理を使って A^n を求めるテクニック

テクニック 1：商と余りの関係にもっていく

ケイリー・ハミルトンの定理から得た式が,

$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ に因数分解できたとする。

このとき， X^n を $(X-\alpha E)(X-\beta E)$ で割ったときの商を $Q(X)$，余りを $qX+rE$ とすると,

$X^n=(X-\alpha E)(X-\beta E)Q(X)+qX+rE$ と表せる。

（ｉ）

$\alpha \neq \beta$ のとき

$X=\alpha E$ のとき， $\alpha^n E=q\alpha E+rE$ ・・・①

$X=\beta E$ のとき， $\beta^n E=q\beta E+rE$ ・・・②

①－②より,

$(\alpha^n-\beta^n)E=q(\alpha-\beta)E$

$\therefore \{q(\alpha-\beta)-(\alpha^n-\beta^n)\}E=O$

$\therefore q=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ ・・・③

これを①に代入すると,

$$\alpha^n E=\frac{\alpha^{n+1}-\alpha\beta^n}{\alpha-\beta}E+rE$$

$$\therefore rE=-\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}E$$

$\therefore r=-\dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}$ ・・・④

③，④より,

$$X^n=(X-\alpha E)(X-\beta E)Q(X)+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}X-\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}E$$

これに $X=A$ を代入すると， $(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ だから,

$$A^n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A-\frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}E$$

（ⅱ）

$\alpha=\beta$ のとき

$X^n=(X-\alpha E)^2Q(X)+qX+rE$ と表せる。

方法 1

$$\begin{aligned}X^n&=\{(X-\alpha E)+\alpha E\}^n\\&=\sum_{k=0}^{n}(X-\alpha E)^k(\alpha E)^{n-k}\\&=\sum_{k=2}^{n}(X-\alpha E)^k(\alpha E)^{n-k}+{}_n\mathrm{C}_0(\alpha E)^n+{}_n\mathrm{C}_1(X-\alpha E)(\alpha E)^{n-1}\\&=\sum_{k=2}^{n}(X-\alpha E)^k(\alpha E)^{n-k}+\alpha^nE+n(X-\alpha E)\alpha^{n-1}E\\&=\sum_{k=2}^{n}(X-\alpha E)^k(\alpha E)^{n-k}+n\alpha^{n-1}X+(1-n)\alpha^nE\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(X-\alpha E)^k(\alpha E)^{n-k}$ は $(X-\alpha E)^2$ で割り切れるから，

X^n を $(X-\alpha E)^2$ で割った余りは，$n\alpha^{n-1}X+(1-n)\alpha^nE$ である。

よって，

$X^n=(X-\alpha E)^2Q(X)+n\alpha^{n-1}X+(1-n)\alpha^nE$

$X=A$ のとき，$(A-\alpha E)^2=O$ だから，

$A^n=n\alpha^{n-1}A+(1-n)\alpha^nE$

方法 2

乱暴であるが，

$X^n=(X-\alpha E)^2Q(X)+qX+rE$　・・・⑤

を X について微分すると，

$nX^{n-1}=2(X-\alpha E)Q(X)+(X-\alpha E)^2Q'(X)+qE$　・・・⑥

⑤，⑥のそれぞれに $X=\alpha E$ を代入すると，

$\alpha^nE=q\alpha E+rE$　・・・⑦

$n\alpha^{n-1}E=qE$　・・・⑧

⑦，⑧より，

$q=n\alpha^{n-1}$，　$r=(1-n)\alpha^n$

よって，

$X^n=(X-\alpha E)^2Q(X)+n\alpha^{n-1}X+(1-n)\alpha^nE$

$X=A$ のとき，$(A-\alpha E)^2=O$ だから，

$A^n=n\alpha^{n-1}A+(1-n)\alpha^nE$

テクニック **2**：数列の漸化式にもっていく

ケイリー・ハミルトンの定理の式を因数分解すると，

$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ になったとする。

(i)

$\alpha \neq \beta$ のとき

$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ より，

$A(A-\beta E)=\alpha(A-\beta E)$ が成り立つ。

ここで， $A^k(A-\beta E)=\alpha^k(A-\beta E)$ が成り立つとすると，

$$
\begin{aligned}
A^{k+1}(A-\beta E) &= AA^k(A-\beta E) \\
&= A\alpha^k(A-\beta E) \\
&= \alpha^k A(A-\beta E) \\
&= \alpha^k \alpha(A-\beta E) \\
&= \alpha^{k+1}(A-\beta E)
\end{aligned}
$$

より， $A^{k+1}(A-\beta E)=\alpha^{k+1}(A-\beta E)$ が成り立つ。

よって，数学的帰納法により，

$A^n(A-\beta E)=\alpha^n(A-\beta E)$ が成り立つことがわかる。

$\therefore A^{n+1}-\beta A^n=\alpha^n(A-\beta E)$ ・・・①

同様に，

$(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$ より，

$A(A-\alpha E)=\beta(A-\alpha E)$

$\therefore A^n(A-\alpha E)=\beta^n(A-\alpha E)$

$\therefore A^{n+1}-\alpha A^n=\beta^n(A-\alpha E)$ ・・・②

①－②より，

$(\alpha-\beta)A^n=\alpha^n(A-\beta E)-\beta^n(A-\alpha E)$

仮定より $\alpha \neq \beta$ だから，

$$A^n=\frac{\alpha^n(A-\beta E)-\beta^n(A-\alpha E)}{\alpha-\beta}$$

（ⅱ）

$\alpha = \beta$ のとき

$(A-\alpha E)(A-\alpha E)=O$ より，

$A(A-\alpha E)=\alpha(A-\alpha E)$

$\therefore A^n(A-\alpha E)=\alpha^n(A-\alpha E)$

$\therefore A^{n+1}-\alpha A^n=\alpha^n(A-\alpha E)$

$$\therefore \frac{A^{n+1}}{\alpha^{n+1}}-\frac{A^n}{\alpha^n}=\frac{A-\alpha E}{\alpha} \quad \cdots ③$$

③は，$\dfrac{A^n}{\alpha^n}$ が初項 $\dfrac{A}{\alpha}$，公差 $\dfrac{A-\alpha E}{\alpha}$ の等差数列であることを示している。

よって，

$$\frac{A^n}{\alpha^n}=\frac{A}{\alpha}+(n-1)\frac{A-\alpha E}{\alpha}$$

$$\therefore A^n=\alpha^{n-1}\{\alpha E+n(A-\alpha E)\}$$

例題

行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ のときの A^n

解

ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2-5A+6E=O$

$\therefore (A-2E)(A-3E)=O$

テクニック 1

X^n を $(X-2E)(X-3E)$ で割ったときの商を $Q(X)$，余りを $qX+rE$ とすると，

$X^n=(X-2E)(X-3E)Q(X)+qX+rE$ と表せる。

よって，

$2^nE=(2q+r)E$，$3^nE=(3q+r)E$

$$\therefore \begin{cases}2q+r=2^n\\ 3q+r=3^n\end{cases}$$

$\therefore q=3^n-2^n$，$r=-2\cdot 3^n+3\cdot 2^n$

$\therefore X^n=(X-2E)(X-3E)Q(X)+(3^n-2^n)X+(-2\cdot 3^n+3\cdot 2^n)E$

$X=A$ のとき，$(A-2E)(A-3E)=O$ より，

$A^n=(3^n-2^n)A+(-2\cdot 3^n+3\cdot 2^n)E$ ・・・(答)

テクニック 2

$(A-2E)(A-3E)=O$ より，

$A(A-3E)=2(A-3E)$

$\therefore A^n(A-3E)=2^n(A-3E)$

$\therefore A^{n+1}-3A^n=2^nA-3\cdot 2^nE$ ・・・①

同様に，

$(A-2E)(A-3E)=O$ より，

$A(A-2E)=3(A-2E)$

$\therefore A^n(A-2E)=3^n(A-2E)$

$\therefore A^{n+1}-2A^n=3^nA-2\cdot 3^nE$ ・・・②

①，②より，

$A^n=(3^n-2^n)A+(-2\cdot 3^n+3\cdot 2^n)E$ ・・・(答)